Exercice 1

Soit $f : A \to B$ la fonction définie par $f(x) = x^2$. Déterminer dans chaque cas si la fonction est injective, surjective, bijective.

a) $A = B = \mathbb{N}$

b) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{N}$

c) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}_+$

d) $A = B = \mathbb{C}$

e) $A = B = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z^5 = 1\}$

f) $A = B = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z^6 = 1\}$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $f(\alpha, \beta) = (\alpha + \beta, \alpha \cdot \beta)$.

a) f est-elle injective ? surjective ?

b) Proposer des sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels la restriction $f : A \to B$ est bijective ; et expliciter la fonction réciproque f^{-1}.

Exercice 3

Soient A, B, C trois ensembles et $f : A \to B$, $g : B \to C$. Pour chaque proposition, donner un argument ou un contrexemple.

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Si $g \circ f$ est injective, alors f et g sont injectives.
3. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
4. Si $g \circ f$ est surjective, alors f et g sont surjectives.
5. Si f est injective et g surjective, alors $g \circ f$ est bijective.
6. Si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.